Modulbeschrieb

MathStudio

Allgemeine Angaben

Modulbezeichnung

MathStudio (TuiT_MathS)

Modulkategorie

Fachliche Vertiefung

Anzahl der Credits

3

Modulverantwortliche/r

Andreas Müller andreas.mueller@ost.ch

Durchführungssetting

Campus	☐ Buchs	x Rapperswil-Jona	☐ St. Gallen
Online Teilnahme	☐ keine Onlineteilnahme möglich	x hybrid für Buchs und St. Galle	☐ ausschliesslich online
Durchführung	x 2 wöchentlich	☐ als Blockwoche	☐ nach Absprache

Der letzte Vortrag findet vor Ort in Rapperswil statt.

Ziele, Inhalt und Methoden

Lernziele, zu erwerbende Kompetenzen

- Ein mathematisches Themengebiet vertiefen.
- Ein mathematisches Thema selbständig bearbeiten und auf eine Anwendung übertragen.
- Verfassen einer wissenschaftlich-mathematischen Arbeit.

Modulinhalt

Die ergänzende Veranstaltung wird als sieben halbtätige Workshops im Frühjahrssemester durchgeführt. Die Teilnehmer/innen erstellen ausserdem unter Anleitung eine schriftliche Arbeit zu einem Anwendungsthema, das sie selbst vorschlagen oder aus einer Liste von Vorschlägen auswählen können. Über ihre Resultate berichten sie in einem Vortrag.

Das mathematische Thema für MathStudio ändert jedes Jahr. Themen vergangener Jahre waren:

- Optimierung
- High Performance Computing
- Quantenmechanik
- Differentialgleichungen
- Kosmologie
- Klimawandel
- Wavelets
- Numerik
- Harmonische Analysis

Das Thema für die ergänzende Veranstaltung wird spätestens zu Beginn des Schuljahres bekannt gegeben.

Thema 2024: Variationsprinzipien

Im Jahre 1696 publizierte Johann Bernoulli das Brachistochronenproblem als Herausforderung an andere Mathematiker: Neue Aufgabe, zu deren Lösung die Mathematiker eingeladen werden. Gegeben zwei Punkte A und B in einer vertikalen Ebene, finde die Bahn AMB eines Punktes M, der unter der Wirkung seines Gewichtes in kürzester Zeit vom Punkt A zum anderen Punkt B absteigt. Das neuartige an dieser Aufgabe war, dass eine Funktion gesucht wird, die eine typischerweise als Integral geschriebene Grösse optimiert. Solche Aufgabenstellungen sind auch aus anderen Zusammenhängen bekannt: man finde den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten, man finde die geschlossene Kurve gegebener Länge in der Ebene, die den grösstmöglichen Flächeninhalt einschliesst, man finde die Bahn, auf der sich ein Raumschiff durch die Atmosphäre mit geringstem Energieaufwand in eine Umlaufbahn bringen lässt, man steuere ein System so, dass es mit möglichst geringem Energieaufwand oder möglichst schnelle von Zustand A in den Zustand B geführt werden kann. Bernoulli hat eine Lösung gefunden, indem er eine optische Analogie herstellen konnte. Das Brechungsgesetz der geometrischen Optik basiert auf dem Fermatschen Prinzip, welches besagt, dass Licht immer den zeitlich kürzesten Weg nimmt. Er hat als ein Extremalproblem durch ein anderes mit bereits bekannter Lösung ersetzt. Euler und Lagrange gelang die direkte Lösung: zu jedem Variationsprinzip gehört eine gewöhnliche Differentialgleichung, heute bekannt als die Euler-Lagrange-Differentialgleichung. Lösungsfunktionen für das Variationsprinzip sind Lösungskurven der Differentialgleichung. Die Formulierung der Mechanik durch Lagrange basiert auf dem Prinzip der kleinsten Wirkung von Maupertuis, einem Extremalprinzip für die Bahnen. Die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen sind die bekannten Differentialgleichungen der Mechanik. Variationsprinzipien sind aber nicht auf Funktionen einer Variablen beschränkt. Die Schwingung einer Seite oder Membran ebenso wie das elektromagnetische Feld unterliegen einem Extremalprinzip. Die zugehörige partielle Differentialgleichung ist die Euler-Ostrogradskische Differentialgleichung. Mit ihr lassen sich die Feldgleichungen der Physik wiederfinden. Und es lassen sich numerische Lösungsverfahren für Differentialgleichungen daraus ableiten. Die hamiltonsche Mechanik verallgemeinert die Idee Bernoullis auf die Mechanik. Die Bewegungsgleichungen erscheinen darin als Bahnen kleinster Wirkung. Feynmann hat diese Idee auf die Physik kleinster Teilchen übertragen. In seinem Bild wird die klassische Mechanik die “geometrische Optik” einer Wellenmechanik. Der Feynmannsche Pfadintegral-Formalismus ermöglicht, die Prinzipien der Quantenmechanik aus einem einheitlichen Extremalprinzip abzuleiten. Das MathStudio 2024 wird die Theorie der Variationsprinzipien von Grund auf behandeln und ungefähr folgende Themen im Vorlesungsteil oder in Seminararbeiten ansprechen:

- Funktionale und Richtungsableitung: Variation
- Euler-Lagrange-Gleichungen für eine Funktion einer Variablen
- Klassische Variationsprobleme: Geodäten (kürzeste Verbindung), Isoperimetrisches Problem, Splines
- Variationsprinzipien in der Physik: Brechungsgesetz, Brachistochronenproblem, klassische Mechanik
- Variationsprinzipien für gewöhnliche lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung
- Variation für Funktionen mehrere Variablen, Euler-Ostrogradski-Gleichung
- Feldgleichungen und Variationsprinzipien: Gravitationsfeld, Maxwell-Gleichungen
- Variationsprinzipien für lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung
- Variationsprinzipien und der Übergang zwischen Feldtheorie und geometrischen Optik
- Variationsprinzipien aus der Elastizitätsmechanik
- Minimalflächen

Lehr- und Lernmethoden

Zweiwöchentliche Workshops mit Vorlesungs- und Übungsteil, gegenseitige Präsentation der Resultate.

Voraussetzungen, Vorkenntnisse, Eingangskompetenzen

Die ergänzende Veranstaltung baut auf den üblichen mathematischen Kenntnissen eines technischen Bachelor-Studiums auf. Es werden keine darüberhinausgehenden Spezialkenntnisse erwartet.

Bibliografie

- Für weiterführende Informationen konsultiere man ab HS 23 das Moodle-Modul MathSem auf http:// moodle.ost.ch oder wende sich direkt an den Modulverantwortlichen.

Leistungsbewertung

Prüfungsart

Der Vortrag wird bewertet von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern. Die schriftliche Arbeit wird vom Dozenten bewertet, sie hat doppeltes Gewicht.

Zulassungsbedingungen

keine

Prüfungsdauer

keine

Hilfsmittel

keine

MathStudio 2025: Felder

Modulbeschreibung FS 2025

Ziele

- Ein mathematisches Themengebiet vertiefen.
- Ein mathematisches Thema selbständig bearbeiten und auf eine Anwendung übertragen.
- Verfassen einer wissenschaftlich-mathematischen Arbeit.

Methoden

Das Seminar wird als sieben halbtätige Workshops im Frühjahrssemester durchgeführt. Die Teilnehmer erstellen ausserdem unter Anleitung eine Seminararbeit zu einem Anwendungsthema, das sie selbst vorschlagen oder aus einer Liste von Vorschlägen auswählen können. Über ihre Resultate berichten sie in einem Vortrag.

Vorkenntnisse

Das Seminar baut auf den üblichen mathematischen Kenntnissen eines technischen Bachelor-Studiums auf. Es werden keine darüber hinausgehenden Spezialkenntnisse erwartet.

Bewertung

Der Vortrag wird von den Seminar-Teilnehmern bewertet. Die Seminararbeit wird vom Dozenten bewertet, sie hat doppeltes Gewicht. Es gibt keine Prüfung.

Modulinhalt

Das mathematische Thema des Seminars ändert jedes Jahr. Themen vergangener Jahre waren:

- Optimierung
- High Performance Computing
- Quantenmechanik
- Differentialgleichungen
- Kosmologie
- Klimawandel
- Wavelets
- Numerik
- Matrizen
- Spezielle Funktionen
- Harmonische Analysis
- Variationsprinzipien

Das Thema für das Seminar wird jeweils spätestens zu Beginn des Schuljahres bekannt gegeben.

Seminarthema 2025: Felder

Das newtonsche Gravitationsgesetz beschreibt die Kraft, die ein schwerer Körper auf einen anderen Körper ausübt. Es erklärt nicht, wie diese Kraft vermittelt wird. Vielmehr erscheint sie als unerklärliche Fernwirkung. Aus mathematischer Sicht kann man aus heutiger Sicht ein rein mathematisch definiertes Potentialfeld spezifizieren, dies erscheint aber primär als ein Rechentrick. Erst die Einsichten von Michael Faraday und später Maxwell haben gezeigt, dass dem Feld tatsächlich auch eine physikalische Bedeutung zukommt, es enthält und transportiert sogar Energie.

Die heutige Physik hat eine grosse Zahl weiterer Felder und ihrer zugehören Feldgleichungen identifiziert. Die Feldgleichungen weisen viele Gemeinsamkeiten auf und es lassen sich auf vielfältige Arten mathematische ausformulieren. Das Mathematische Seminar 2025 befasst sich mit den verschiedenen Feldbeschreibungsmethoden, die die Mathematik über die Jahre entwickelt hat. Es untersucht gemeinsame Eigenschaften von Feldern und verschiedene Anwendungen der Feldtheorie in der Physik wie Elastizitätstheorie, Wellen, elektromagnetische Felder, Gravitation.

Da Felder physikalische Objekte sind, sollten sie zum Beispiel unabhängig von gewählten Koordinatensystemen sein, oder die Umrechnung zwischen verschiedenen Koordinatensystemen sollte sich unmittelbar aus den Definitionen ergeben. Die moderne Feldtheorie verwendet dafür als vereinheitlichende Grundlage das Konzept der differenzierbaren Mannigfaltikeit. Die Felder sind dann Skalare, Vektoren oder Differentialformen auf der Mannigfaltigkeit. Diese Konzepte verallgemeiner die Werkzeuge der Vektoranalysis auf beliebige Dimensionen.

Aufbauend auf den genannten Mathematischen Grundlagen (1, 2, 4–8) werden Anwendungen in verschiedenen Bereichen der Physik und Technik diskutiert (3, 9–12):

1. Mannigfaltigkeiten
2. Vektoren, Kovektoren, Tensoren und Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten
3. Tensoren in der Theorie des starren Körpers
4. Vektorfelder als Differentialoperatoren, Lie-Klammer
5. Äussere Ableitung von Differentialformen
6. Integration von Funktionen und Differentialgormen auf Mannigfaltigkeiten
7. Der allgemeine Satz von Stokes und die niedrigdimensionalen Spezialfälle der Sätze von Green, Gauss und Stokes.
8. Differentialsysteme und partielle Differentialgleichungen
9. Elastizitätstheorie und Tensorfelder, Grundgleichungen der Elastizitätstheorie
10. Symplektische Formen und allgemeine Mechanik, Hamiltonsche Mechanik
11. Faraday-Tensor und das elektromagnetische Feld, Maxwell-Gleichungen
12. Feldtheorie für das Gravitationsfeld, Metrischer Tensor, Geodäten und Krümmung

Weiterführende Informationen

Für weiterführende Informationen konsultiere man ab HS 24 das Moodle-Modul **MathSem** auf `http://moodle.ost.ch` oder wende sich direkt an den Modulverantwortlichen. Das Moodle-Modul enthält die thematische Detailinformationen zum Mathematischen Seminar auf Bachelor-Stufe, welches das gleiche Thema behandelt.

Modulverantwortung

Prof. Dr. Andreas Müller, `mailto:andreas.mueller@ost.ch`