

Übung 9

-

Zufallsvariablen und stetige Verteilungen

Aktuelle Version: 30. August 2022

Hinweise:

- Übungen sind mit Vorteil alleine zu lösen.
- Benutzen Sie die Musterlösungen nur zur Korrektur.
- Die Übungen sind wichtige Vorbereitungen für die Prüfung. Lösen sie die Übungen sorgfältig und stellen Sie die Lösungswege übersichtlich dar.
- (Ergänzte) Vorlesungsunterlagen und Fachbücher helfen beim Lösen von Übungen und bringen gleichzeitig eine erweiterte Ansicht auf die Problemstellung.
- Wenn Sie die Übungen nicht verstehen, fragen Sie!

Übung 1. *Fragen*

1. Worin liegt die Bedeutung der Normalverteilung?
2. Was ist der Zusammenhang zwischen Normalverteilung und Standardnormalverteilung?
3. Welche wichtigen stetigen Verteilungsfunktionen kennen Sie? Welchen Erwartungswert und welche Varianz haben diese?

Übung 2. *Rechtecksverteilung*

Sie besuchen Freunde an der Uni Erfurt und wollen von dort mit der nächsten S-Bahn weiterfahren, und zwar zwischen 17 und 18 Uhr. Zwischen 17 und 18 Uhr fahren die Strassenbahnen der Linien 3 und 6 ab Haltestelle Universität Richtung "Ürbicher Kreuz" bzw. "Rieth" jeweils im 10-Minuten Takt. Der erste Zug der Linie 3 fährt um 17:05 Uhr, der erste Zug der Linie 6 um 17:00 Uhr. Wenn ein Sie zufällig zu einer gleichverteilten Zeit zwischen 17:00 Uhr und 18:00 Uhr die Haltestelle erreichen und einfach in die nächste Strassenbahn einsteigt, wie gross ist die dann die Wahrscheinlichkeit, dass Sie eine Bahn in Richtung „Rieth“ nehmen?

Übung 3. *Exponentialverteilung*

Ein Software-Hersteller hat für seine Kunden in Süddeutschland die Hotline SD eingerichtet. An Werktagen rufen zwischen 20.00 und 21.00 Uhr durchschnittlich 5 Kunden an.

1. Alle wie viele Minuten erwarten Sie durchschnittlich ein Anruf ein?
2. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen zwei Anrufen höchstens 6 Minuten vergehen?
3. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen zwei Anrufen höchstens 15 Minuten vergehen?
4. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen zwei Anrufe 6 bis 15 Minuten vergehen?
5. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen zwei Anrufen mehr als 18 Minuten vergehen?

Übung 4. *Normalverteilung*

Eine fränkische Winzergenossenschaft füllt den Wein in Bocksbeutel ab. Messungen haben ergeben, dass die Füllmenge der Bocksbeutel normalverteilt ist mit einer durchschnittlichen Füllmenge von 753 ml bei einer Standardabweichung von 2 ml.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass:

1. Die Sollfüllmenge von 750 ml eines Bocksbeutels unterschritten wird?

2. In einem Bocksbeutel mindestens 757 ml enthalten sind?
3. In einem Bocksbeutel zwischen 752 und 754 ml enthalten sind?

Übung 5. *Inverse Transformationsmethode*

Mit der inversen Transformationsmethode können Zufallszahlen in eine gewünscht Verteilungsform gebracht werden. Gegeben seien die folgenden, zwischen $[0, 1]$ gleichverteilten Zufallszahlen:

$$u_i = (0.71, 0.11, 0.98, 0.64)$$

Transformieren Sie die Zufallszahlen so, dass sie einer

1. Gleichverteilung mit $a = 2$ und $b = 7$ folgen
2. Exponentialverteilung mit $\lambda = 0.5$ folgen

Zusatzaufgaben

Übung 6. Rechtecksverteilung

Gegeben sei die Rechtecksverteilung:

$$f(x) = \begin{cases} h & a < x < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

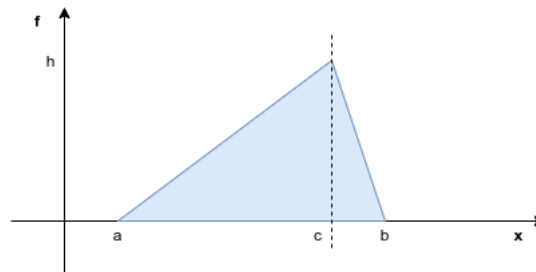
Zeigen Sie, dass:

1. $h = \frac{1}{b-a}$
2. $E(x) = \frac{b+a}{2}$
3. $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

Nehmen Sie nun eine symmetrische Rechtecksverteilung an: $d = b = -a$.
Wie verändert sich $f(x)$, $E(x)$ und σ in Abhängigkeit von d ?

Übung 7. Dreiecksverteilung

Gegeben sei die Dreiecksverteilung:



1. Bestimmen Sie h .
2. Bestimmen die Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x)$ im Bereich $[a, c]$.
3. Bestimmen die Verteilungsfunktion $F(x)$ im Bereich $[a, c]$.
4. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit $P(x \leq c)$?

Übung 8. *Normalverteilung*

Die Erfahrung hat gezeigt, dass die Ergebnisse bei Prüfungen eines Dozenten normalverteilt sind mit einer Standardabweichung von $\sigma = 1.5$ und einem Durchschnitt von $\mu = 4.5$ Notenpunkten.

1. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Student eine Note kleiner als 4 hat?
2. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Student eine Note grösser als 5 hat?
3. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Student eine Note zwischen 3.5 und 4 hat?
4. Wie viele Studenten von insgesamt 50 fallen durchschnittlich durch, wenn auf halbe Noten gerundet wird?