

Übung 8

-

Zufallsvariablen und diskrete Verteilungen

Aktuelle Version: 7. November 2022

Hinweise:

- Übungen sind mit Vorteil alleine zu lösen.
- Benutzen Sie die Musterlösungen nur zur Korrektur.
- Die Übungen sind wichtige Vorbereitungen für die Prüfung. Lösen sie die Übungen sorgfältig und stellen Sie die Lösungswege übersichtlich dar.
- (Ergänzte) Vorlesungsunterlagen und Fachbücher helfen beim Lösen von Übungen und bringen gleichzeitig eine erweiterte Ansicht auf die Problemstellung.
- Wenn Sie die Übungen nicht verstehen, fragen Sie!

Übung 1. *Fragen*

1. Was ist eine Zufallsvariable?
2. Was ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung?
3. Erklären Sie den Unterschied zwischen diskreten und stetigen Zufallsvariablen!
4. Erklären Sie den Unterschied zwischen diskreten und stetigen Verteilungen!
5. Erklären Sie den Unterschied zwischen empirischen und theoretischen Verteilungen!
6. Wie ist der Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeits-, Dichte- und Verteilungsfunktion?
7. Welche diskreten Verteilungsfunktionen kennen Sie und in welchen Fällen werden diese angewendet?
8. Wie ist der Zusammenhang zwischen Binomialverteilung und Poissonverteilung?
9. Wie ist der Zusammenhang zwischen Bernoulli- und Binomialverteilung?

Übung 2. *Empirische Verteilung*

Sie haben die folgende Urliste:

$$x_i = (1, 4, 2, 2, 4, 3, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 5)$$

Bestimmen Sie:

1. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion und das entsprechende Diagramm.
2. Die Verteilungsfunktion und das entsprechende Diagramm.
3. Den Erwartungswert.
4. Die Varianz.

Übung 3. *Theoretische Verteilung*

In einem Münzwurfspiel wird ein Einsatz von 1 CHF erhoben. Es wird dreimal eine Münze geworfen. Nach jedem Wurf wird 1 CHF ausgezahlt, wenn „Zahl“ oben landet. Die Zufallsvariable X sei der Gewinn des Spielers nach den 3 Würfeln.

1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion und die Verteilfunktion von X und stellen Sie sie grafisch dar.
Hinweis: Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsfunktion schreiben Sie am besten alle möglichen Ausgänge des Spiels auf und zählen dann die Möglichkeiten mit 0, 1, 2 bzw. 3 Erfolgen.
2. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz.
3. Mit welchem Gewinn können Sie rechnen, wenn Sie das Spiel 800-Mal spielen?
4. Die Zufallsvariable Y sei der Gewinn des Spielers pro Spiel. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion und stellen Sie diese grafisch dar.
5. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Zufallsvariablen X und Y ?
6. Wie gross der Erwartungswert und die Varianz von Y ?
7. Angenommen der Spielleiter merkt, dass er auf lange Sicht nur Verluste hat. Was geschieht mit dem Erwartungswert und der Varianz von X , wenn der Einsatz auf 2 CHF bzw. 3 CHF erhöht wird?
8. Welchen Einsatz muss der Spielleiter mindestens nehmen, damit er keinen Verlust macht?

Übung 4. *Bernoulli-Verteilung*

Bei einer Bernoulli-Verteilung auf $\{0, 1\}$ ist das Ereignis 1 viermal so wahrscheinlich wie das Ereignis 0. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion, die Verteilungsfunktion, den Erwartungswert sowie die Varianz.

Übung 5. *Binomialverteilung*

Ein Touristikunternehmen bietet in jedem Herbst eine exklusive Kulturreise zu den Schlössern der Loire an. Die Reise erfolgt mit einem Kleinbus, in dem neun Touristen Platz haben. Aus langjähriger Erfahrung weiss der Unternehmer, dass eine jede Buchung in den letzten beiden Tagen mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% kurzfristig storniert wird. Der Unternehmer hat wegen der kurzfristigen Stornierungen statt neun Buchungen zehn Buchungen entgegengenommen.

1. Welches Überbelegungsrisiko geht der Unternehmer ein?
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Unternehmer mit 9 Mitreisenden ideal belegt?
3. Um in der Gewinnzone zu bleiben, müssen mindestens acht Personen mitfahren. Wie wahrscheinlich ist es, dass der Unternehmer noch kurzfristig für Ersatzreisende sorgen muss, um nicht in die Verlustzone zu geraten?
4. Mit wie vielen Stornierungen hat er durchschnittlich zu rechnen?

Übung 6. *Poissonverteilung*

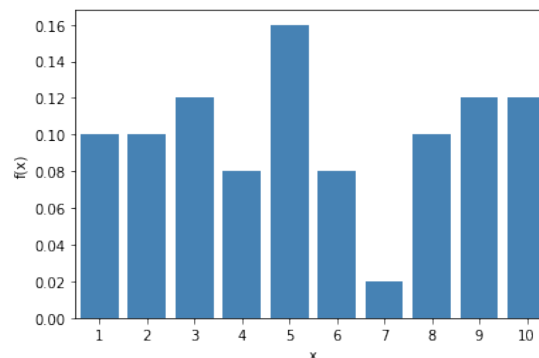
Ein Software-Hersteller hat für seine Kunden in Süddeutschland die Hotline SD eingerichtet. An Werktagen rufen zwischen 20.00 und 21.00 Uhr durchschnittlich 5 Kunden an. Die Hotline ist so besetzt, dass sie in dieser Zeitspanne 9 Anrufe entgegennehmen kann.

1. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 20:00 und 21:00 Uhr drei Kunden anrufen?
2. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Hotline überlastet ist?
3. Bei der Hotline OD für die Kunden in Ostdeutschland gehen zwischen 20.00 und 21.00 durchschnittlich 4 Anrufe ein; es können 7 Anrufe entgegengenommen werden. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der beiden Hotlines überlastet ist?
4. Kann durch eine Zusammenlegung der beiden Hotlines die Wahrscheinlichkeit der Überlastung gesenkt werden?

Zusatzaufgaben

Übung 7. *Empirische Verteilung*

Sie haben die folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion einer empirischen Verteilung:



- Schätzen Sie den Erwartungswert.
- Berechnen Sie den Erwartungswert ausgehend von der folgenden Urlist:

$$x_i = (5, 6, 8, 10, 1, 2, 9, 10, 3, 4, 9, 5, 3, 9, 3, 5, 7, \\ 6, 1, 1, 9, 8, 9, 6, 9, 4, 5, 8, 2, 4, 2, 5, 10, 2, \\ 4, 5, 10, 3, 6, 3, 1, 8, 1, 3, 5, 5, 2, 10, 8, 10)$$

Übung 8. *Hypergeometrische Verteilung*

In einer früheren Aufgabe haben Sie die Wahrscheinlichkeit berechnet, beim Schweizer Lotto (6 aus 42) 3 Richtige zu ziehen. Das Ziehen von Lottozahlen folgt der hypergeometrischen Verteilung: Aus einer Menge von N Elementen, davon M günstige Elemente und $N - M$ ungünstige Elemente, wird eine Stichprobe der Grösse n ohne zurücklegen gezogen. Die Wahrscheinlichkeit, dass dabei k günstige Elemente gezogen werden, ist:

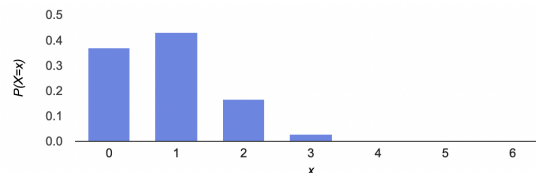
$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Dementsprechend ist die Wahrscheinlichkeit, $k = 3$ Richtige von insgesamt $M = 6$ Richtigen bei $n = 6$ Zahlen aus insgesamt $N = 42$ Zahlen zu ziehen:

$$P(X = 3) = \frac{\binom{6}{3} \binom{42-6}{6-3}}{\binom{42}{6}} = 0.027$$

Sie haben die folgende Tabelle für $N = 42$, $M = 6$ und $n = 6$:

k	$P(k)$
0	$3.7 \cdot 10^{-1}$
1	$4.3 \cdot 10^{-1}$
2	$1.7 \cdot 10^{-1}$
3	$2.7 \cdot 10^{-2}$
4	$1.8 \cdot 10^{-3}$
5	$4.2 \cdot 10^{-5}$
6	$1.9 \cdot 10^{-7}$



1. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens 3 Richtige zu ziehen?
2. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, maximal 5 Richtige zu ziehen?
3. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens 1, aber maximal 3 Richtige zu ziehen?

Übung 9. *Binomialverteilung*

Ein Glücksrad ist in 9 gleichgrosse Abschnitte eingeteilt, die mit den Zahlen 1 bis 9 durchnummeriert sind.

1. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei siebenmaligem Drehen das Rad zweimal im Feld 8 stehen bleibt?
2. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei siebenmaligem Drehen das Rad viermal in einem Feld mit einer geraden Nummer stehen bleibt?

Übung 10. *Poissonverteilung*

An einer Kreuzung kommt es pro Jahr zu durchschnittlich 2 Autounfälle.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es dieses Jahr

1. zu keinem Unfall kommt,
2. zu vier Unfällen kommt,
3. zu weniger als drei Unfällen kommt.